TITLE:

有限要素法による非均一2次元弾性定数逆問題の非決定性について(最適化理論と数理構造)

AUTHOR(S):

岩村, 覚三; 中村, 玄

数理解析研究所講究録
第 864 巻 1994 年 91-93

有限要素法による非均一2次元弾性体弾性定数逆問題の非決定性について (UNSOLVABILITY OF THE MATERIAL INVERSE PROBLEM OF A 2-DIMENSIONAL NONHOMOGENEOUS ELASTIC BODY UNDER A FINTE ELEMENT METHOD)

岩村覚三　　中村玄
KAKUZO IWAMURA AND GEN NAKAMURA

Dept. of Mathematics, Josai Univ.

ABSTRACT. **In this short note, we discuss about unsolvability of the material inverse problem of a 2-dimensional nonhomogeneous elastic body under a finite element method.**

ここでは有限要素法モデルについて考える。要素は長さ a の正方形からなるものを考える。ヤング率、ポアッソン比は要素 j で定数 E_j, ν_j であるとする（図A参照）。要素 i と要素 j の境界に於いては応力及び歪は矛盾することなく連続であるとする。要素に作用する表面力 $\{p\}$ は、一般には正方形の各辺に作用するのであるが、この表面力がなす仕事と等価な仕事をする節点力が働くものとする (3) 。格子点α に働く $x, y-$ 方向の力の成分を $f_{x\alpha}, f_{y\alpha}$とし、$x, y-$方向の変位を u_α, v_αとする。図Aの要素 i に対し次式がなりたつ。

$$
(0)\qquad
\begin{pmatrix} f_{x\alpha} \\ f_{x\beta} \\ f_{x\gamma} \\ f_{x\delta} \\ f_{y\alpha} \\ f_{y\beta} \\ f_{y\gamma} \\ f_{y\delta} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
a & b & c & 0 & 0 & d & f & e \\
b & a & 0 & c & f & e & 0 & d \\
c & 0 & a & b & d & 0 & e & f \\
0 & c & b & a & e & f & d & 0 \\
0 & f & d & e & a & c & b & 0 \\
d & e & 0 & f & c & a & 0 & b \\
f & 0 & e & d & b & 0 & a & c \\
e & d & f & 0 & 0 & b & c & a
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_\gamma \\ u_\delta \\ v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \\ v_\delta \end{pmatrix}
$$

ここで

$$a = p(\frac{3}{2} - 2\nu), b = -p(1-\nu), c = -p(\frac{1}{2} - \nu), d = p\nu, e = -(\frac{1}{2})p,$$

$$f = p(\frac{1}{2} - \nu) = -c, p = \frac{tE}{2(1+\nu)(1-2\nu)}, E = \text{ヤング率、}$$

$$(1)\qquad \nu = \text{ポアッソン比、} t = \text{部材の厚さ（既知）}$$

である。係数行列の対角線上はすべて a であり

$$\begin{pmatrix} f_{x\alpha} \\ f_{x\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{pmatrix} + \cdots, \cdots, \begin{pmatrix} f_{y\gamma} \\ f_{y\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\gamma \\ v_\delta \end{pmatrix} + \cdots \tag{2}$$

という特殊な形式をしていることに注意。式 (0) を図 B に適用して重ね合わせた式は次のように書ける。

$$KU = F \tag{3}$$

ここで

$U^T = \{u_1, u_2, \cdots, u_{16}; v_1, v_2, \cdots, v_{16}\}, F^T = \{f_{x1}, f_{x2}, \cdots, f_{x16}; f_{y1}, f_{y2}, \cdots, f_{y16}\}$ とする.

定理. $B=\{1,2,3,4,5,8,9,12,13,14,15,16\}$ の各点に加えられた外力とそれに対する変位量の観測が出来るものとする。任意の B-観測に対し E_5, ν_5を決定することは出来ない。

証明. $E_j, \nu_j (j \neq 5)$ の全ての物質定数が決定されたとしておこう。全ての $u_j, v_j (j \in B)$ を移項すると 10 個の未知数 $u_j, v_j (j \in B^c), E_5, \nu_5$を持つ 6 個の方程式が残る。終。

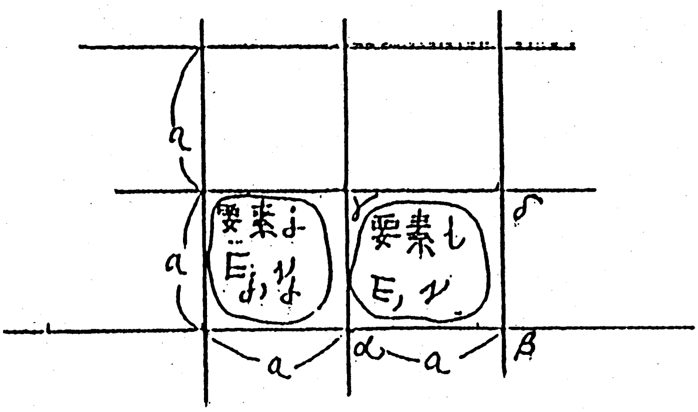
予想. 上の定理の B にたいし、有限回（f 回）の B-観測を、いかに工夫して実行しても E_5, ν_5を決定することは出来ない。

References

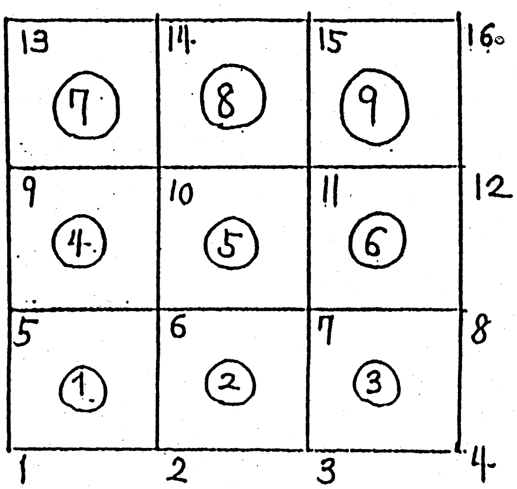
1. 岩村覚三、出口洋三, 二次元離散バネ定数系の逆問題について , LA 夏のシンポジウム (1991).
2. 久保史郎、大路清嗣 , 離散系の材料特性値逆問題に対する解析手法, 日本機械学会論文集（A編） 5 7巻5 4 1号（1 9 9 1 − 9）, 315-321.
3. 三好俊郎 , 有限要素法入門, 培風館 , 1978.
4. 岩村覚三、中村元, 二次元弾性体逆問題 、1 9 9 2年3月1 4日.

SAKADO, SAITAMA 350-02 JAPAN

E-mail: kiwamura@tansei.cc.u-tokyo.ac.jp



図A 有限要素モデル・矩形構造



図B 反例のモデル